Die allgemeine Methode Reihen zu summieren - weiterentwickelt *

Leonhard Euler

§1 Die allgemeine Methode Reihen zu summieren, die ich im ausgehenden letzten Jahr dargestellt habe, erstreckt sich freilich sehr weit, weil sie allein aus dem gegebenen allgemeinen Term der Reihe eine der Summe gleiche Formel darbietet; dennoch wird sie indes sehr schwer auf Reihen solcher Art, deren allgemeine Terme nicht algebraisch angegeben werden können, sondern entweder exponentielle oder gar transzendente Größen beinhalten, angewandt. Weil nämlich, nachdem der allgemeine Term X gesetzt worden ist, dessen Index x sei, die Summe der Reihe vom ersten Term bis hin zu X diesem Ausdruck gleich ist

$$\int Xdx + \frac{X}{1 \cdot 2} + \frac{dX}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2dx} - \frac{d^3X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6dx^3} + \text{etc.},$$

wird leicht klar, wenn X zumindest Größen der a^x involviert, dass so der Ausdruck $\int X\,dx$ wie die Differentiale von X zu Logarithmen führen, woher sich größte Unannehmlichkeiten bei der näherungsweisen Angabe der gesuchten Summe auftun.

---

*Originatitel: „Methodus universalis series summandi ulterius promota“, erstmals publiziert in „Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 8, 1741, pp. 147-158 “, Nachdruck in „Opera Omnia: Series 1, Volume 14, pp. 124 - 137 “, eine Version veröffentlicht in Comment. acad. sc. Petrop. 8, ed. nova, Bononiae 1752, pp. 132-144 [55a] , Eneström-Nummer E 55, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Marcel Barth, im Rahmen des Hauptseminars „Euler“, Sommersemester 2015, JGU Mainz

§2 Außerdem werden, obgleich X eine algebraische Größe war, dennoch die Differentiale die, um die Summe zu erhalten, gebildet werden müssen, oftmals so kompliziert, dass sie nicht nur sehr schwer dargeboten werden können, sondern auch eine kaum konvergierende Reihe geben, wie es bei dieser Reihe passiert

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}+\text{...etc.},$$

die die Quadratur des Kreises beinhaltet. Der Grund für diese Schwierigkeit ist hauptsächlich darin gelegen, dass ich um die Einheit wachsende Indizes angenommen habe; wenn ich um eine andere Zahl wachsende angenommen hätte, wäre der allgemeine Term X unter Umständen handbarer hervorgegangen. Wenn schließlich der Allgemeine Term X nicht einmal dargeboten werden kann, wie es bei vielen Reihen passiert, dann hat die gegebene die Summe darbietende Formel nicht einmal einen Nutzen.

§3 Wie ich diesen Schwierigkeiten entgegnen könnte, darüber habe ich lange nachgedacht und schließlich bemerkt, dass aus demselben Prinzip, mit dessen Hilfe ich jene Formel gefunden hatte, auch andere passende Formeln finden kann, um gewissen Reihen zu summieren; nach Darbietung derer ist für jede sich ergebene Reihe die Formel auszuwählen, die am passendsten ist. Es scheint aber ratsam von jedem Geschlecht von Formeln dieser Art zwei Formeln anzugeben, von denen die eine geeignet ist, um Reihen vom ersten bis zu einem gegebenen Term zu summieren, von welcher Art die schon zuvor von mir mitgeteilte Formel war, die andere hingegen geeignet ist, um Reihen von einem gegebenen Term aus bis ins Unendliche zu summieren. Obgleich nämlich diese letzte Summation aus der ersten folgt, wird es dennoch zuträglich sein, für diesen Fall eine eigene Formel angegeben zu haben.

§4 Ich möchte also mit Reihen beginnen, deren allgemeiner Term algebraisch dargeboten werden kann, für welche auch die in der vorausgehenden Abhandlung angegebene Methode dienlich ist; aber ich möchte die Indizes in irgendeiner arithmetischen Progression fortschreitend annehmen, damit sich die Formel weiter erstreckt und zugleich einen Rechenvorteil mit sich bringt. Es sei also die Reihe vom Anfang bis zu einem gegebenen Term zu summieren und mit Indizes aufgeschrieben sei dies die folgende

$$\begin{array}{llllll} a & a+b & a+2b & & x & \\ A+ & B+ & C+ & ...+ & X & = S \end{array}$$

wo die Indizes um die Größe b wachsen und der Index des ersten Terms A gerade a ist. Man setze die Summe dieser Summe $= S$, wenn in diesem Ausdruck anstelle von x der Ausdruck $x-b$ eingesetzt wird, ist es offenkundig, dass er dieselbe Summe um den Term X vermindert darbieten wird oder selbiger dann $S-X$ gleich wird. Aber wenn in S anstelle von x $x-b$ gesetzt wird, dann wird hervorgehen

$$S - \frac{b\ dS}{1\ dx} + \frac{b^2\ ddS}{1 \cdot 2\ dx^2} - \frac{b^3\ d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3\ dx^3} + \text{etc.}$$

woher man die folgende Gleichung haben wird

$$X = \frac{b\ dS}{1\ dx} - \frac{b^2\ ddS}{1 \cdot 2\ dx^2} + \frac{b^3\ d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3\ dx^3} - \frac{b^4\ d^4S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\ dx^4} + \text{etc.}$$

Aus dieser Gleichung findet man aber diese Formel

$$\begin{aligned} S = \int \frac{X\ dx}{b} + \frac{X}{1 \cdot 2} + \frac{b\ dx}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2\ dx} - \frac{b^3 d^3 X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6\ dx^3} + \frac{b^5 d^5 X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 7 \cdot 6\ dx^5} \\ - \frac{3b^7 d^7 X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 9 \cdot 10\ dx^7} + \frac{5b^9 d^9 X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 11 \cdot 6\ dx^9} - \frac{691 b^{11} d^{11} X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 13 \cdot 210\ dx^{11}} \\ + \frac{35 b^{13} d^{13} X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 15 \cdot 2\ dx^{13}} - \frac{3617 b^{15} d^{15} X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 17 \cdot 30\ dx^{15}} + \frac{2423279 b^{17} d^{17} X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 19 \cdot 1890\ dx^{17}} \\ - \text{etc.} \end{aligned}$$

welchem Ausdruck eine so große Konstante hinzuzufügen ist, dass für $x = a$ gesetzt $S = A$ oder für $x = a - b$ gesetzt $S = 0$ wird.

§5 Wenn $X = x^n$ gesetzt wird oder wenn die Summe dieser Reihe zu finden ist

$$a^n + (a+b)^n + (a+2b)^n + ... + x^n,$$

wird gelten

$$\int X\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \ \frac{dX}{dx} = nx^{n-1}, \ \frac{d^3X}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}, \ \text{etc.}$$

Daher wird also die gesuchte Summe sein

$$\begin{aligned}S =& \frac{x^{n+1}}{(n+1)b} + \frac{x^n}{1\cdot 2} + \frac{nbx^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)b^3x^{n-3}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)b^5x^{n-5}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 6} - \text{ etc.}\\ &- \frac{a^{n+1}}{(n+1)b} + \frac{a^n}{1\cdot 2} - \frac{nba^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)b^3a^{n-3}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\\ &- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)b^5a^{n-5}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 6} + \text{ etc.}\end{aligned}$$

nach Hinzufügen einer entsprechenden Konstante.
Also wird die Summe der Reihe

$$a + (a+b) + (a+2b) + ... + x$$

diese sein

$$= \frac{x^2}{2b} + \frac{x}{2} + \frac{b}{12} - \frac{a^2}{2b} + \frac{a}{2} - \frac{b}{12} = \frac{x^2 - a^2 + bx + ab}{2b}$$

und die Summe der Reihe

$$\begin{aligned}a^2 + (a+b)^2 + (a+2b)^2 + ... + x^2 =& \frac{x^3}{3b} + \frac{x^2}{2} + \frac{bx}{6} - \frac{a^3}{3b} + \frac{a^2}{2} - \frac{ab}{6}\\ =& \frac{2x^3 - 2a^3 + 3bx^2 + 3a^2b + b^2x - ab^2}{6b}\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind denen ähnlich, die ich für die Summen der Potenzen der natürlichen Zahlen in der oberen Abhandlung angegeben habe, und sie werden auch leicht aus ihnen gebildet.

§6 Es sei nun, um die andere Formel dieses Geschlechts zu finden, die Reihe vom gegebenen Term X, dessen Index x sei, bis ins Unendliche zu summieren, also diese

$$\begin{array}{llll} x & x+b & x+2b & \\ X+ & Y+ & Z+ & etc \text{ bis ins Unendliche} = S \end{array}$$

Wenn in der Summe S also für x $x-b$ geschrieben wird, wird $S - X$ hervorgehen; es wird daher gelten

$$X = -\frac{b\,dS}{1\,dx} - \frac{b^2\,ddS}{1\cdot 2\,dx^2} - \frac{b^3\,d^3S}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3} - \text{etc.}$$

woher wie oben aufgefunden werden wird

$$S = -\int \frac{X\,dx}{b} + \frac{X}{1\cdot 2} + \frac{b\,dX}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2\,dx} - \frac{b^3\,d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\,dx^3} - \frac{b^5\,d^5X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot 7\cdot 6\,dx^5}$$
$$+ \frac{3b^7\,d^7X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot 9\cdot 10\,dx^7} - \frac{5b^9\,d^9X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot 11\cdot 6\,dx^9} + \frac{691b^{11}d^{11}X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot 13\cdot 210\,dx^{11}}$$
$$- \frac{35b^{13}\,d^{13}X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot 15\cdot 2\,dx^{13}} + \frac{3617b^{15}\,d^{15}X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot 17\cdot 30\,dx^{15}} - \frac{2423279b^{17}\,d^{17}X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot 19\cdot 1890\,dx^{17}}$$
$$+ \text{etc.}$$

Dieser Formel ist eine so große Konstante hinzuzufügen, dass $S = 0$ wird, wenn $x = \infty$ gesetzt wird; wenn nämlich der Term X schon der infinitesimale oder letzte in der Reihe war, muss die Summe verschwinden, wenn freilich die Reihe eine endliche Summe hat, für welchen Fall diese Formel geeignet ist.

§7 Damit der Gebrauch dieser Formel deutlich wird, sei $X = \frac{1}{x^2}$, oder diese Reihe

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+b)^2} + \frac{1}{(x+2b)^2} + \text{etc.}$$

bis ins Unendliche zu summieren; es wird wegen

$$\int X\,dx = -\frac{1}{x}, \quad \frac{dX}{dx} = \frac{-2}{x^3}, \quad \frac{d^3X}{dx^3} = \frac{-2\cdot 3\cdot 4}{x^5}, \text{ etc.}$$

$$S = \frac{1}{bx} + \frac{1}{2x^2} + \frac{b}{6x^3} - \frac{b^3}{30x^5} + \frac{b^5}{42x^7} - \frac{b^7}{30x^9} + \frac{5b^9}{66x^{11}} - \frac{691b^{11}}{2730x^{13}} + \frac{7b^{13}}{6x^{15}} - \frac{3617b^{15}}{510x^{17}}$$
$$+ \frac{2423279b^{17}}{35910x^{19}} - \text{etc.}$$

welcher Ausdruck keine Konstante erfordert, weil er für $x = \infty$ verschwindet. Diese Reihe konvergiert umso mehr, umso größer x in Bezug auf b war. Wenn daher einige anfängliche Terme der Reihe tatsächlich addiert werden, wird die mit dieser Methode gefundene Summe der übrigen jenem Aggregat hinzugefügt die Summe der bis ins Unendliche fortgesetzten Reihe geben.

§8 Aber nachdem nun diese Dinge abgehandelt worden sind, die nur die erste Regel angenehmer machen, schreite ich dazu voran, Reihe zu summieren, für welche jene Form nicht ausreicht. Es sei nämlich eine Reihe zu summieren, in welcher die Vorzeichen alternieren, wie

$$\begin{array}{cccccccc} a & a+b & a+2b & a+3b & & x & x+b & \\ A- & B+ & C- & D+ & ...+ & X- & Y & =S; \end{array}$$

wie in dieser Reihe Y eine solche Funktion von $x+b$ ist, wie X eine von x ist, wird gelten

$$Y = X + \frac{b\,dX}{1\,dx} + \frac{b^2\,ddX}{1\cdot 2\,dx^2} + \frac{b^3\,d^3}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3} + \text{etc.}$$

Wenn darauf in S anstelle von x $x-2b$ gesetzt wird, wird $S-X+Y$ hervorgehen; es wird also gelten

$$\begin{aligned} -Y+X &= \frac{2b\,dS}{1\,dx} - \frac{4b^2\,ddS}{1\cdot 2\,dx^2} + \frac{8b^3\,d^3S}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3} - \frac{16b^4\,d^4S}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dx^4} + \frac{32b^5\,d^5S}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,dx^5} - \text{etc.} \\ &= -\frac{b\,dX}{1\,dx} - \frac{b^2\,d^2X}{1\cdot 2\,dx^2} - \frac{b^3\,d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3} - \frac{b^4\,d^4X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dx^4} - \text{etc.} \end{aligned}$$

Man setze

$$\frac{dS}{dx} = \frac{\alpha\,dX}{dx} + \frac{\beta\,d^2X}{dx^2} + \frac{\gamma\,d^3X}{dx^3} + \frac{\delta\,d^4X}{dx^4} + \text{etc.}$$

und nach Koeffizientenvergleich wird hervorgehen

$$S = C - \frac{X}{2} - \frac{3b\,dX}{4\,dx} - \frac{b^2\,ddX}{2\,dx^2} - \frac{3b^3\,d^3X}{16\,dx^3} - \frac{b^4\,d^4X}{24\,dx^4} - \frac{9b^5\,d^5X}{1440\,dx^5}$$

und nach Einführung von Y wird gelten

$$S = C - Y + \frac{X}{2} + \frac{b\,dX}{1\cdot 2\cdot 2\,dx} - \frac{b^3\,d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 2\,dx^3} + \frac{3b^5\,d^5X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 2\,dx^5} - \text{etc.}$$

Und daher wird gelten

$$\begin{aligned} &A-B+C-D+E-F+...+X \\ &= Const. + \frac{X}{2} + \frac{b\,dX}{1\cdot 2\cdot 2\,dx} - \frac{b^3\,d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 2\,dx^3} + \frac{3b^5\,d^5X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 2\,dx^5} - \text{etc.} \end{aligned}$$

wo die Konstante wie zuvor so beschaffen sein muss, dass diese Summe$=A$ wird, nachdem $x=a$ gesetzt worden ist.

§9 Nachdem aber die Terme dieser letzten Formel weiter fortgesetzt und die Summe dieser Reihe wie folgt festgelegt worden ist

$$\begin{array}{cccccccc} a & a+b & a+2b & a+3b & & x & \\ A- & B+ & C- & D+ & \ldots+ & X & =S; \end{array}$$

wird hervorgehen

$$\begin{aligned} S =& Const. + \frac{X}{1\cdot 2} + \frac{b\,dX}{1\cdot 2\cdot 2\,dx} - \frac{b^3\,d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 2\,dx^3} + \frac{3b^5\,d^5X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 2\,dx^5} \\ & - \frac{17b^7\,d^7X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 2\,dx^7} + \frac{155b^9\,d^9X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 2\,dx^9} \\ & - \frac{2073b^{11}\,d^{11}X}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot 12\cdot 2\,dx^{11}} + \frac{382276b^{13}\,d^{13}X}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot 14\cdot 2\,dx^{13}} - \text{etc.} \end{aligned}$$

Wenn also der Wert von nachstehender Progression zu suchen ist

$$a^2-(a+b)^2+(a+2b)^2-(a+3b)^2+\ldots+x^2,$$

welcher S sei, wird wegen

$$\frac{dX}{dx}=2x$$

gelten

$$S=Const.+\frac{x^2}{2}+\frac{bx}{2}.$$

Die Konstante C wird aber gefunden werden, indem $x=a$ gesetzt wird. Und es wird gelten

$$\frac{a^2-ab+x^2+bx}{2}.$$

Es wird eines Beispiels wegen gelten

$$1-4+9-16+25+\ldots+121=66$$

§10 Wir wollen nun eine ins Unendliche fortgesetzte Reihe dieser Art betrachten, natürlich

$$\begin{array}{llll} x & x+b & x+2b & \\ S = X- & Y+ & Z- & \text{etc. bis ins Unendliche} \end{array}$$

Es wird also gelten

$$S + \frac{2b\ dS}{1\ dx} + \frac{4b^2\ ddS}{1\cdot 2\ dx^2} + \frac{8b^3\ d^3S}{1\cdot 2\cdot 3\ dx^3} + \text{etc.} = S - X + Y$$

oder

$$X - Y = -\frac{2bdS}{1\ dx} - \frac{4b^2ddS}{1\cdot 2\ dx^2} - \text{etc.}$$

woher, weil gilt

$$Y = X + \frac{b\ dX}{1\ dx} + \frac{b^2\ ddX}{1\cdot 2\ dx^2} + \frac{b^3\ d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\ dx^3} + \text{etc.},$$

gefunden werden wird

$$\begin{aligned} S = {} & \frac{X}{1\cdot 2} - \frac{b\ dX}{1\cdot 2\cdot 2\ dx} + \frac{b^3\ d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 2\ dx^3} - \frac{3b^5\ d^5X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 2\ dx^5} + \\ & + \frac{17b^7\ d^7X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 8\cdot 2\ dx^7} - \frac{155b^9\ d^9X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 10\cdot 2\ dx^9} + \frac{2073b^{11}\ d^{11}X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 11\cdot 2\ dx^11} - \\ & - \frac{38227b^{13}\ d^{13}X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 14\cdot 2\ dx^13} + \text{etc.} + \text{Const.} \end{aligned}$$

Diese Konstante muss so beschaffen sein, dass $S = 0$ für $x = \infty$ wird. Mithilfe dieser Formel werden also langsam konvergierende Reihen, in welchen die Vorzeichen der Terme alternieren, sehr genau summiert werden können.

§11 Es sei $X = \frac{1}{x}$, so dass die Summe dieser Reihe

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+2b} - \frac{1}{x+3b} + \text{ etc. } \quad \text{ins Unendliche}$$

gefunden werden muss. Weil also $X = \frac{1}{x}$ ist, wird gelten

$$\frac{dX}{dx} = \frac{-1}{x^2},\ \frac{d^3X}{dx^3} = \frac{-2\cdot 3}{x^4},\ \frac{d^5X}{dx^5} = \frac{-2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{x^6},\ \text{etc.}$$

und daher wird werden

$$S=\frac{1}{2x}+\frac{b}{2\cdot 2\,x^2}-\frac{b^3}{4\cdot 2\,x^4}+\frac{3b^5}{6\cdot 2\,x^6}-\frac{17b^7}{8\cdot 2\,x^8}+\frac{155b^9}{10\cdot 2\,x^{10}}-$$
$$-\frac{2073b^{11}}{12\cdot 2\,x^{12}}+\frac{38227b^{13}}{14\cdot 2\,x^{14}}-\text{etc.}$$

wo die Addition einer Konstanten nicht von Nöten ist.
Es sei $b=2$ und $x=25$, die Summe der Reihe

$$\frac{1}{25}-\frac{1}{27}+\frac{1}{29}-\frac{1}{31}+\frac{1}{33}-\text{etc.}$$

wird sein

$$=\frac{2}{100}+\frac{8}{100^2}-\frac{256}{100^4}+\frac{8\cdot 4^6}{100^6}-\frac{17\cdot 4^8}{100^8}+\frac{31\cdot 128\cdot 4^{10}}{100^{10}}-\frac{691\cdot 256\cdot 4^{12}}{100^{12}}+$$
$$+\frac{5461\cdot 2048\cdot 4^{14}}{100^{14}}-\text{etc.}=0,020797971915$$

Sehr genau, wenn zu dieser die Summe die tatsächliche Summe der vorausgehender Terme, $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\ldots-\frac{1}{23}$, hinzuaddiert wird, wird der vierte Teil der Peripherie des Kreises mit Durchmesser 1 hervorgehen.

§12 Diese bisher angegebenen Formeln erfordern, damit die Rechnung leicht durchgeführt werden kann, dass X eine algebraische Funktion von x ist, so dass deren Differentiale jeden Grades angenehm dargeboten werden können. Denn diese Formeln könnten kaum oder nicht einmal kaum benutzt werden, wenn im allgemeinen Term eine Exponentialgröße wie n^x vorhanden wäre. Es wird also gefällig sein, für Progressionen mit diesem allgemeinen Term: Xn^x, wo X wie zuvor eine algebraische Funktion von x bezeichnet, eigene Summationsformeln zu finden. Es sei deshalb diese Reihe

$$\begin{array}{ccccc} a & a+b & a+2b & & x \\ An^a+ & Bn^{a+b}+ & Cn^{a+2b}+ & \ldots+ & Xn^x \end{array}$$

zu summieren und die Summe werde $=Sn^x$ gesetzt. Aber diese Formel wird für $x-b$ anstelle von x gesetzt in diese übergehen

$$n^{x-b}\left(S-\frac{bdS}{1\,dx}+\frac{b^2d^2S}{1\cdot 2\,dx^2}-\frac{b^3d^3S}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3}+\text{etc.}\right),$$

welche also der ersten Summe Sn^x um den letzten Term Xn^x vermindert gleich sein muss. Man wird also diese Gleichung haben

$$Sn^b - Xn^b = S - \frac{bdS}{1\,dx} + \frac{b^2d^2S}{1\cdot 2\,dx^2} - \frac{b^3d^3S}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3} + \frac{b^4d^4S}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dx^4} - \text{etc.}$$

Aus dieser Gleichung muss der Wert von S gefunden werden.

§13 Man setze also $n^b = m$ und es wird gelten

$$S = \frac{mX}{m-1} - \frac{\alpha b\ dX}{1(m-1)^2\ dx} + \frac{\beta b^2\ ddX}{1\cdot 2(m-1)^3\ dx^2} - \frac{\gamma b^3\ d^3X}{1\cdot 2\cdot 3(m-1)^4\ dx^3} +$$
$$+ \frac{\delta b^4\ d^4X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(m-1)^5\ dx^4} - \frac{\epsilon b^5\ d^5X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5(m-1)^6\ dx^5} + \text{etc.}$$

Daher folgt durch Koeffizientenvergleich und $m-1=p$

$$\begin{aligned}
\alpha &= m,\\
\beta &= 2\alpha + mp,\\
\gamma &= 3\beta + 3\alpha p + mp^2,\\
\delta &= 4\gamma + 6\beta p + 4\alpha p^2 + mp^3,\\
\epsilon &= 5\delta + 10\gamma p + 10\beta p^2 + 5\alpha p^3 + mp^4,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

woher für die Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. die folgenden Werte erhalten werden

$$\begin{aligned}
\alpha &= m,\\
\beta &= 2m + mp,\\
\gamma &= 6m + 6mp + mp^2\\
\delta &= 24m + 36mp + 14mp^2 + mp^3\\
\epsilon &= 120m + 240mp + 150mp^2 + 30mp^3 + mp^4\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Hier ist jede beliebige Zahl das Vielfache der darüber geschriebenen zusammen mit der vorausgehenden, wie

$$\begin{aligned}
30 &= 2(1+14)\\
150 &= 3(14+36)\\
240 &= 4(36+24)\\
120 &= 5(24+0)
\end{aligned}$$

oder für $m-1$ anstelle von p dann

1. $\alpha = m$
2. $\beta = m + m^2$
3. $\gamma = m + 4m^2 + m^3$
4. $\delta = m + 11m^2 + 11m^3 + m^4$
5. $\epsilon = m + 26m^2 + 66m^3 + 26m^4 + m^5$
6. $\zeta = m + 57m^2 + 302m^3 + 302m^4 + 57m^5 + m^6$
   etc.

welche so fortschreiten, dass der Koeffizient ψ, dessen Index k ist, dieser ist

$$\begin{aligned}
=&m\left(2^k - \frac{k+1}{1}\right)m^2 + \left(3^k - \frac{k+1}{1}\cdot 2^k + \frac{(k+1)k}{1\cdot 2}\right)m^3 + \\
&+\left(4^k - \frac{k+1}{1}\cdot 3^k + \frac{(k+1)k}{1\cdot 2}\cdot 2^k - \frac{(k+1)k(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\right)m^4 + \\
&+ \dots + m^k
\end{aligned}$$

§14 Aus diesen wird also die Summe der vorgelegten Reihe erschlossen zu

$$\begin{aligned}
n^x &\left[\frac{n^b X}{n^b - 1} - \frac{n^b b\ dX}{1(n^b-1)^2\ dx} + \frac{(n^{2b}+n^b)b^2\ ddX}{1\cdot 2\cdot (n^b-1)^3\ dx^3} - \frac{(n^{36}+4n^{2b}+n^b)b^3\ d^3X}{1\cdot 2\cdot 3(n^b-1)^4\ dx^3}\right. \\
&\left. + \frac{(n^{4b}+11n^{3b}+11n^{2b}+n^b)b^4\ d^4X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(n^b-1)^5\ dx^4} + \text{etc.}\right] + const
\end{aligned}$$

welche Konstante so beschaffen sein muss, dass für $x = a$ die Summe $= An^a$ wird. Wenn $n^b = -1$ gesetzt wird, wird die Reihe in eine rein algebraische übergehen, in welche die Vorzeichen alternieren, und daher wird durch Setzen von -1 anstelle von n^b dieselbe Formel resultieren, welche wir in demselben Fall schon oben in §9 gefunden haben.
Die Summe der ins unendlich laufende Reihe

$$\begin{array}{llll}
x & x+b & x+2b & \\
Xn^x + & Yn^{n+b} + & Zn^{x+2b} + & \text{etc. bis ins Unendliche}
\end{array}$$

ist aber

$$n^x \cdot \left[-\frac{X}{n^b-1}+\frac{n^b b\; dX}{1(n^b-1)^2\; dx}-\frac{(n^{2b}+n^b)b^2\; ddX}{1\cdot 2\cdot (n^b-1)^3\; dx^3}-\frac{(n^{36}+4n^{2b}+n^b)b^3\; d^3X}{1\cdot 2\cdot 3(n^b-1)^4\; dx^3}\right.$$
$$\left.+\frac{(n^{4b}+11n^{3b}+11n^{2b}+n^b)b^4\; d^4X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(n^b-1)^5\; dx^4}\right]+\text{Const.}$$

welche Konstante so beschaffen sein muss, dass für $x=\infty$ die Summe $=0$ wird; das folgt freilich per se immer zu passieren, so dass die Konstante nicht nötig ist, wenn die Reihe freilich konvergiert und eine endliche Summe hat.

§15 Aus der ersten Formel für die Summation von Reihen dieser Art bis zu einem gegebenen Term wird eingesehen, wenn X eine solche algebraische Funktion von x war, dass schließlich ihre höheren Differentiale verschwinden, dass dann der summatorischen Term tatsächlich dargeboten werden kann. Wenn deswegen die Reihe, deren allgemeiner Term X ist, summierbar war, dann wird auch die Reihe, deren allgemeinert Term $X\; n^x$ ist, summierbar sein. So wird nach Vorlage der Reihe

$$a^2n^a+(a+b)^2n^{a+b}+(a+2b)^2n^{a+2b}+\ldots+x^2n^x$$

ihre Summe diese sein

$$n^x\cdot\left(\frac{n^bx^2}{n^b-1}-\frac{2n^bbx}{n^b-1}+\frac{(n^{2b}+n^b)b^2}{(n^b-1)^3}\right)+\text{Const.}$$

welche Konstante für $x=a$ und Summe $=a^2n^a$ dann hervorgehen wird als

$$=n^a\cdot\left(a^2-\frac{n^ba^2}{n^b-1}+\frac{2n^bab}{(n^b-1)^2}-\frac{(n^{2b}+n^b)b^2}{(n^b-1)^3}\right)$$

§16 Außerdem hat die andere Formel einen riesigen Nutzen beim Summieren unendlicher Reihen; damit dies klarer wird, sei diese Reihe vorgelegt

$$\frac{n^x}{x}+\frac{n^{x+2}}{x+2}+\frac{n^{x+4}}{x+4}+\frac{n^{x+6}}{x+6}+\text{etc.}$$

deren Summe $=S$ sei. Es wird also $b=2$ und $X=\dfrac{1}{x}$ sein, woher die Summe werden wird

$$n^x\cdot\left[\frac{-1}{(n^2-1)x}-\frac{2n^2}{(n^2-1)^2x^2}-\frac{4(n^4+n^2)}{(n^2-1)^3x^3}-\frac{8(n^6+4n^4+n^2)}{(n^2-1)^4x^4}-\frac{16(n^8+11n^6+11n^4+n^2)}{(n^2-1)^5x^5}-\text{etc.}\right]$$

Es sei nun $x = 25$ und $n^2 = -\frac{1}{3}$ oder $n = \frac{1}{\sqrt{-3}}$; es wird gelten

$$\frac{1}{\sqrt{-3}}\left(\frac{1}{25\cdot 3^{12}}-\frac{1}{27\cdot 3^{13}}+\frac{1}{29\cdot 3^{14}}-\frac{1}{31\cdot 3^{15}}\right)$$
$$=\frac{1}{3^{12}\sqrt{-3}}\left(\frac{3}{4\cdot 25}+\frac{3}{8\cdot 25^3}-\frac{3}{8\cdot 25^3}-\frac{3}{16\cdot 25^4}+\frac{15}{8\cdot 25^5}+\text{etc.}\right)$$

Weil also im Kreis mit Radius 1 der Bogen von dreißig Grad derart ist

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\frac{1}{9\cdot 3^4}-\text{etc.}\right)$$

werden, wenn nur 12 dieser Terme tatsächlich addiert werden, die übrigen folgenden sein

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{25\cdot 3^{12}}-\frac{1}{27\cdot 3^{13}}+\frac{1}{29\cdot 3^{14}}-\text{etc.}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3^{12}}\left(\frac{1}{4\cdot 25}+\frac{1}{8\cdot 25^2}-\frac{1}{8\cdot 25^3}-\frac{1}{16\cdot 25^4}+\frac{5}{8\cdot 25^5}+\text{etc.}\right)$$

§17 Wenn die Terme der zu summierenden Reihe aus Faktoren zusammengesetzt waren, sodass die Reihe eine Form dieser Art hat

$$\begin{array}{ccccc} a & a+b & a+2b & & x \\ A+ & AB+ & ABC+ & \ldots + & ABC\ldots VX \end{array}$$

werde die Summe wie folgt festgelegt

$$= S\cdot ABC\cdot\ldots\cdot VX$$

Diese Summe wird also für $x-b$ anstelle von x gesetzt in diese übergehen

$$ABC\ldots V\left(S-\frac{b\;dS}{1\;dx}+\frac{b^2\;ddS}{1\cdot 2\;dx^2}-\frac{b^3\;dS^3}{1\cdot 2\cdot 3\;dx^3}+\text{etc.}\right),$$

welche der erste Summe weniger dem letzten Term gleich sein muss, das heißt dieser Größe

$$ABC\ldots V(SX-X)$$

Deswegen wird man diese Gleichung haben

$$SX - X = S - \frac{b\ dS}{1\ dx} + \frac{b^2\ ddS}{1 \cdot 2\ dx^2} - \frac{b^3\ dS^3}{1 \cdot 2 \cdot 3\ dx^3} + \frac{b^4\ d^4S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\ dx^4} - \text{etc.}$$

Aus dieser Gleichung wird der gefundene Wert von S dieser sein

$$S = \frac{X}{X-1} + E + F + G + \text{etc.},$$

welche Terme so fortschreiten, dass nach setzen von

$$\frac{X}{X-1} = D$$

gilt

$$\begin{aligned} E &= -\frac{bdD}{(X-1)\ dx} \\ F &= -\frac{bdE}{(X-1)\ dx} + \frac{b^2ddD}{1 \cdot 2(X-1)\ dx^2} \\ G &= -\frac{bdF}{(X-1)\ dx} + \frac{b^2ddE}{1 \cdot 2(X-1)\ dx^2} - \frac{b^3d^3D}{1 \cdot 2 \cdot 3(X-1)\ dx^3} \end{aligned}$$

und so weiter, dass daher die Summe der vorgelegten Reihe dann diese ist

$$ABC...VX(D + E + F + G + ...)$$

Aber die Summe der bis ins Unendliche fortgesetzter Reihe

$$\begin{array}{lll} x & y & \\ ABC...VX+ & ABCD...VXY+ & \text{etc.} \end{array}$$

wird diese sein

$$= ABC...VX(1 - D - E - F - G - \text{etc.}) + \text{Const.}$$

Wie wenn die Summe dieser Reihe gesucht wird

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot x} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot x \cdot (x+1)} + \text{etc. bis ins Unendliche}$$

wird gelten

$$b = 1,\ X = \frac{1}{x},\ \text{und } D = \frac{1}{1-x},$$

dann aber

$$E = \frac{-x}{(1-x)^3},\ F = \frac{x(2+x)}{(1-x)^5},\ \text{etc.}$$

die Summe der vorgelegten Reihe wird wegen der verschwindenden Konstante diese sein

$$= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x}\left(1 + \frac{1}{x-1} - \frac{x}{(x-1)^3} + \frac{x(x+2)}{(x-1)^5} - \text{etc.}\right)$$

Aus diesen angegebenen Dingen wird aber leicht eingesehen, eine Form von welcher Art in einem bestimmten sich auftauchenden Fall genommen werden muss, damit die Summe mit geringstem Aufwand gefunden wird.